数理解析研究所講究録
第 738 巻 1991 年 53-64



# Estimates for Harmonic Maps and their Applications

都立大 理学部 高桑 昇一郎 ( Shôichirô Takakuwa )

## §1. Definitions and Examples of Harmonic Maps

$\Omega$ を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし、$\Omega$ から compact Riemann 多様体 $M$ への $C^\infty$ 写像 $u: \Omega \longrightarrow M$ を考える。このとき、Nash の定理により、$M$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ に等長的に埋めこんでおく。$\mathbb{R}^d$ の座標を用いて、$u(x) = (u^\alpha(x)) = (u^1(x), \cdots, u^d(x))$ と表す。写像 $u$ の微分 $du$ のノルムの二乗を

$$e(u)(x) = |du(x)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=1}^{n} |D_i^\alpha u|^2 .$$

と表す。関数 $e(u)$ は写像 $u$ のエネルギー密度と呼ばれる。$e(u)$ の $M$ 上の積分

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega e(u)(x)\, dx ,$$

を写像 $u$ のエネルギーと呼ぶ。対応 $u \longmapsto E(u)$ は $\Omega$ から $M$ への $C^\infty$ 写像の空間 $C^\infty(\Omega, M)$ 上の汎関数を定める。

**定義** 1.1. $C^\infty$ 写像 $u$ が有限なエネルギーをもち、汎関数 $E$ の critical point であるとき、$u$ を *harmonic map* と呼ぶ。

写像 $u$ が $E$ の critical point であるとは、$t = 0 \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された $C^\infty$ 級の 1-parameter family $\{u_t\} \subset C^\infty(\Omega, M)$ で、$u_0 = u$ , $\Omega$ の compact 部分集合の外では $u_t = u$ であるものに対して、つねに

$$\left.\frac{d}{dt}E(u_t)\right|_{t=0} = 0 ,$$

をみたすことをいう。

汎関数 $E$ の critical point は $E$ に対する Euler-Lagrange 方程式

$$\text{(HM)} \qquad \Delta u^\alpha + \sum_{i=1}^{n} A^\alpha_{u(x)}(D_i u, D_i u) = 0 , \qquad \alpha = 1, \cdots, d ,$$

の解として特徴付けられる。ここで、$A_y = (A_y^\alpha)$ ( $y \in M$ ) は多様体 $M$ の第二基本形式を表す。式 (HM) は、非線型二階楕円型偏微分方程式系であり、これを harmonic map の方程式と呼ぶ。式 (HM) は、各 $x \in \Omega$ に対して $\Delta u(x)$ を $\mathbb{R}^d$ のベクトルとみたとき、その $M$ に対する接方向成分が消えることを意味している。以下、良く知られた harmonic map の例を挙げる。

例 1.2. $M = \mathbb{R}$ のとき、harmonic map $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ は調和関数である。実際、式 (HM) は、Laplace の方程式 $\Delta u = 0$ となる。

例 1.3. $\Omega$ が開区間 $I$ ( $\subset \mathbb{R}$ ) のとき、式 (HM) は、$M$ の測地線の方程式にほかならない。このとき、harmonic map $u : I \longrightarrow M$ は constant speed の測地線となる。

例 1.4. $\Omega$ を $\mathbb{R}^2$ の領域、$M$ を 2 次元球面 $S^2$ ( $\subset \mathbb{R}^3$ ) とする。方程式 (HM) は

$$\Delta u^\alpha + |du|^2 u^\alpha = 0, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3,$$

となる。$\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と、$S^2$ を Riemann 球面とそれぞれ同一視する。このとき、$\Omega$ から $S^2$ への正則または反正則写像はすべて harmonic map となることが知られている。

**Notations**

$B(r)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の半径 $r$ の open ball

$B(x,r)$ : $\mathbb{R}^n$ 内の中心 $x$ 半径 $r$ の open ball

$\omega_n$ : $\mathbb{R}^n$ の単位球の体積 $= 2\pi^{n/2} \,/\, n\Gamma(n/2)$.

$W^{1,p} = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ : $\Omega$ から $\mathbb{R}^d$ への 写像のなす Sobolev space

## §2. A priori Estimates

この節では、harmonic map の一階微分の a priori 評価についての結果をいくつか述べる。その際、基本になるのは次の関係式である。

**命題 2.1.** ( Bochner–Weitzenböck の公式 [ 2 ], [ 11 ] )

$u$ を $\Omega$ から $M$ への harmonic map とすると、次の公式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\Delta e(u) = |\nabla du|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} R_M\big(u_*(\frac{\partial}{\partial x_i}), u_*(\frac{\partial}{\partial x_j}), u_*(\frac{\partial}{\partial x_i}), u_*(\frac{\partial}{\partial x_j})\big)\,, \tag{2.1}$$

ここで、$R_M$ は $M$ の曲率テンソルであり、$u_* : T\Omega \longrightarrow TM$ は $u$ の微分写像を表す。

この公式より、次の命題が容易に導かれる。

**命題 2.2.** $u$ を $\Omega$ から $M$ への hamonic map とすると、

$$\frac{1}{2}\Delta e(u) \geq |\nabla du|^2 - \kappa_M e(u)^2\,, \tag{2.2}$$

$$\Delta |du| \geq -\kappa_M |du|^3\,, \tag{2.3}$$

が成り立つ。ここで、$\kappa_M$ は $M$ の断面曲率の上限である。

これより、$M$ の断面曲率に対する条件のもとで a priori 評価が得られる。

**定理 2.3.** ( [ 3 ], [ 11 ] ) 多様体 $M$ の断面曲率は非正とする。このとき、任意の harmonic map $u : \Omega \longrightarrow M$ と任意の open ball $B(r) \subset \Omega$ に対して、次の評価式が成り立つ。

$$\sup_{B(r/2)} |du|^2 \leq \frac{C}{r^n}\int_{B(r)} |du|^2\, dx\,, \tag{2.4}$$

ここで、$C$ は $n$ だけで定まる定数である。

[ **証明** ] $M$ に対する条件より、$\kappa_M \leq 0$ であり、(2.2) より、$e(u)$ は $\Omega$ 上の subharmonic function となる。任意の $y \in B(r/2)$ と $B(y, r/2)$ に対して、mean value inequality を用いて

$$|du(y)|^2 \leq \frac{1}{\mathrm{meas}(B(x_0, r/2))}\int_{B(y,r/2)} |du|^2\, dx \leq \frac{2^n}{\omega_n r^n}\int_{B(x_0,r)} |du|^2\, dx\,.$$

よって、求める結果を得る。 ( **証明終** )

このほかにも、ある種の条件をみたす $M$ と $u$ に対しては、定理 2.3 と同様の評価式が得られている（[4]）。しかし、一般の多様体については、次の弱い形の定理しか証明されていない。

**定理 2.4.** 次の性質をもつ定数 $\epsilon_0 = \epsilon_0(n, M) > 0$ が存在する。:

harmonic map $u : B(r) \longrightarrow M$ が条件 $\int_{B(r)} |du|^n\,dx \le \epsilon_0$ をみたせば、不等式

$$\sup_{B(r/2)} |du| \le \frac{C}{r}\Big(\int_{B(r)} |du|^n\,dx\Big)^{1/n}, \tag{2.5}$$

が成り立つ。ここで、$C$ は $n, M$ より定まる定数である。

[**証明**] $B(r)$ の中心は原点と仮定する。はじめに、$r_1 = 3r/4$ とおくと、積分の単調性より、任意の $y \in B(r_1)$, $0 < \sigma \le r_1 - |y|$ について

$$\int_{B(y,\sigma)} |du|^n\,dx \le \int_{B(r)} |du|^n\,dx\,,$$

が成り立つことに注意する。

$\sigma_0 \in [0, r_1)$, $x_0 \in \overline{B(\sigma_0)}$ を次の様に定める。

$$(r_1-\sigma_0)^2 \sup_{B(\sigma_0)} e(u) = \max_{0<\sigma\le r_1} (r_1-\sigma)^2 \sup_{B(\sigma)} e(u), \tag{2.6}$$
$$e(u)(x_0) = \sup_{B(\sigma_0)} e(u)\,.$$

さらに、

$$e_0 = e(u)(x_0)\,, \qquad \rho_0 = \frac{1}{2}(r_1 - \sigma_0)\,, \qquad r_0 = \sqrt{e_0}\,\rho_0\,,$$

とおく。$\sigma_0, x_0$ のえらび方より、

$$\sup_{B(x_0,\rho_0)} e(u) \le \sup_{B(\sigma_0+\rho_0)} e(u) \le 4e_0\,.$$

である。$C^\infty$ 写像 $v : B(r_0) \longrightarrow M$ を $v(z) = u\Big(\dfrac{z - x_0}{\sqrt{e_0}}\Big)$ で定義すると、

$$\sup_{B(r_0)} e(v) \le 4\,, \qquad e(v)(0) = 1\,.$$

よって、(2.3) より

$$\Delta|dv| \ge -4\kappa_M\,|dv|\,, \qquad \text{in } B(r_0)\,,$$

が成り立つ。いま、$r_0 \geq 1$ と仮定すると、de Giorgi–Nash–Moser の定理より、

$$1 = |dv|^n(0) \leq C \int_{B(1)} |dv|^n \, dz = C \int_{B(x_0, 1/\sqrt{e_0})} |du|^n \, dx \,,$$
$$\leq C \int_{B(r)} |du|^n \, dx \leq C\epsilon_0 \,,$$

となり、十分小さい $\epsilon_0$ に対して矛盾となる。よって、$r_0 \leq 1$ であり、ふたたび、de Giorgi–Nash–Moser の定理を用いて、

$$1 = |dv|^n(0) \leq \frac{C}{r_0^n} \int_{B(r_0)} |dv|^n \, dz = \frac{C}{\rho_0^n} \int_{B(x_0, \rho_0)} |du|^n \, dx \,,$$

$$e_0^{n/2} \rho_0^n \leq C \int_{B(x_0, \rho_0)} |du|^n \, dx \,,$$

よって、

$$\rho_0^2 e_0 \leq C\Big(\int_{B(x_0, \rho_0)} |du|^n \, dx\Big)^{2/n} \leq C\Big(\int_{B(r)} |du|^n \, dx\Big)^{2/n} .$$

を得る。この式と (2.6) を合わせて、

$$\max_{0<\sigma\leq r_1} (r_1 - \sigma)^2 \sup_{B(\sigma)} |du|^2 \leq C\Big(\int_{B(r)} |du|^n \, dx\Big)^{2/n} .$$

ここで、$\sigma = r/2$ とおけば

$$r^2 \sup_{R(r/2)} |du|^2 \leq C\Big(\int_{B(r)} |du|^n \, dx\Big)^{2/n} ,$$

となり、求める結果を得る。（証明終）

**注意 2.4.**

(i) 上の定理の証明では Schoen ([ 11 ]) の方法を用いた。Schoen は harmonic map に対する monotonicity formula ( [ 9 ] ) を用いて、定理 2.4 と同様の評価式を示している。

(ii) $\Omega$ の次元 $n$ が 3 以上の場合には、定理 2.4 は de Giorgi–Nash–Moser の iteration method ([ 5 ]) を用いても証明することができる ([ 13 ] 参照)。

## §3. Obstruction for Estimates

前節では、多様体 $M$ に何の幾何的条件を仮定することなく $M$ への harmonic map に対し、定理 2.4 の a priori 評価を得た。しかし、定理 2.4 では一階微分の $L^n$ ノルムが小さいことを仮定しているため、この評価は一般には局所的にしか成り立たないものといえる。この節では、定理 2.4 の local estimate が global に成り立つかどうかを考える。

定理 2.4 に現れる定数 $\epsilon_0$ に対し、次の定理が成り立つ。

**定理 3.1.** ( [ 15 ] ) harmonic map $v : \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ が、

$$\int_{\mathbf{R}^n} |dv|^n \, dx \leq \epsilon_0 \,, \tag{3.1}$$

をみたすならば、$v$ は定値写像である。

**注意 3.2.** 上の定理は微分が $L^p$ class に属する harmonic map $v$ に対する Liouville の定理のひとつと考えることができる。$dv \in L^p$ ( $p < n$ ) の場合には monotonicity formula ( [ 9 ], [ 13 ] ) を用いて次の結果を示すことができる。

**定理 3.3.** $n \geq 3$ とする。harmonic map $v : \mathbf{R}^n \longrightarrow M$ が

$$\int_{\mathbf{R}^n} |dv|^p \, dx < \infty \,, \qquad \text{for some } 2 \leq p < n \,,$$

を満たせば、$v$ は定値写像である。

この結果は任意の多様体 $M$ に対して成り立つことを注意しておく。これより、条件 $dv \in L^p$ で $p = n$ の場合が critical な意味をもつことがわかる。

定理 3.1 より、次の系を得る。

**系 3.4.** ( [ 15 ] ) 定数 $\epsilon_0$ は上からの評価

$$\epsilon_0 \leq \inf \Big\{ \int_{\mathbf{R}^n} |dv|^n \, dx \;\Big|\; v : \mathbf{R}^n \longrightarrow M \text{ is a non-constant harmonic map.} \Big\} \,. \tag{3.2}$$

をもつ。

よって、一般には $\epsilon_0 < \infty$ であり、定理 2.4 も global には成り立たない。実際、次の例が成り立つ。

例 3.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $M = S^2$ のとき、$\epsilon_0 \leq 8\pi$ である。

[ 証明 ] $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ をエネルギー有限な harmonic map とする。いま、$\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視することにより、$v(z) = v(x, y)$ ( $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ) は次の形に書けることが知られている ( [ 1 ] )。

$$v(z) = \pi\Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\Big), \quad \text{または、} = \pi\Big(\frac{P(\overline{z})}{Q(\overline{z})}\Big),$$

ここで、$P$, $Q$ は複素係数の多項式であり、写像 $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ は極射影

$$\pi(x, y) = \Big( \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, 1 - \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \Big).$$

である。さらに、そのエネルギーについても関係式

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |dv|^2 \, dx = 4\pi \max\{ \deg P, \deg Q \},$$

より、$4\pi$ の整数倍の値しかとらないことが知られている。よって、(3.2) の右辺は $8\pi$ に等しいことがわかる。 ( 証明終 )

系 3.4 は $L^n$ 可積分な一階微分をもつ全空間 $\mathbb{R}^n$ から $M$ への non-constant harmonic map の存在が定理 2.4 の local estimate が global に成り立つための obstruction を与えていることを示している。よって、$\mathbb{R}^n$ からの non-constant harmonic map が存在しないような $M$ に対しては global estimate が成り立つものと予想される。これに関係して、$M$ の断面曲率が非正の場合には次の Liouville の定理が成り立っていることを注意しておく。

定理 3.6. 多様体 $M$ は非正断面曲率をもつとする。harmonic map $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ が条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} |dv|^p \, dx < \infty, \qquad \text{for some } p \geq 2.$$

をみたすならば、$v$ は定値写像である。

証明は $|dv|$ が $\mathbb{R}^n$ 上の subharmonic function となることと Yau の結果 [ 16 ] による。

## §4. Applictions

この節では、第2節で示した a priori 評価の応用について述べる。はじめに、harmonic map の孤立特異点について、次の除去可能定理が成り立つ。

**定理** 4.1. ( [ 7 ], [ 10 ], [ 13 ] ) $\Omega$ を $\mathbb{R}^n$ の領域、$x_0$ を $\Omega$ の一点、$u : \Omega - \{x_0\} \longrightarrow M$ を harmonic map とする。$u$ が条件

$$\int_K |du|^n \, dx < \infty \,, \qquad \text{for each compact set } K \subset \Omega \,, \tag{4.1}$$

をみたすならば、$x_0$ は $u$ の除去可能な特異点である。すなわち、$u$ は $\Omega$ 全体から $M$ への harmonic map に拡張できる。

[ **証明の概略** ] 条件 (4.1) より、十分小さい $R_0 > 0$ が存在して

$$\int_{B(x_0,R)} |du|^n \, dx \le \epsilon_0 \,, \qquad \text{for any } R \text{ with } 0 < R \le R_0 \,,$$

が成り立つ。定理 2.4 を用いて、$0 < |x - x_0| \le R_0/2$ ならば

$$|x - x_0||du(x)| \le \left( \int_{B(x_0, 2|x-x_0|)} |du|^n \, dx \right)^{1/n} = o(1) \,, \tag{4.2}$$

が成り立つ。さらに、[T1, §4] と同様の計算により $u$ は $\Omega$ から $M$ への連続写像に拡張できることが示せる。$u$ が方程式 (HM) の弱解となることに注意して、楕円型偏微分方程式の弱解の正則性の一般論を用いれば、$u$ は $C^\infty$ 写像となり求める結果を得る。 ( 証明終 )

除去できない特異点をもつ harmonic map の例として、次が知られている。

例 4.2. ( [ 8 ] ) $\Omega = B(0,1)$, $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ とし、写像 $U$ を

$$U : \Omega - \{0\} \longrightarrow S^{n-1} \,, \quad \text{by} \quad U(x) = \frac{x}{|x|} \,.$$

で定めると、$U$ は原点 0 を孤立特異点にもつ minimizing harmonic map となる。

$$\int_{\Omega - B(0,\epsilon)} |dU|^n \, dx = (n-1)^{n/2} n\omega_n \log \frac{1}{\epsilon} \,, \qquad \text{for any } 0 < \epsilon < 1 \,,$$

より、$U$ は条件 (4.1) をみたさないことがわかる。さらに、任意の $p < n$ に対して $|dU| \in L^p(\Omega)$ より、条件 (4.1) は微分 $du$ のべきに対して best possible であることがわかる。

次の応用として、harmonic map に対する収束定理を述べる。

**定理 4.3.** ( [ 10 ], [ 14 ] ) $\{u_j\}$ を Sobolev 空間 $W^{1,n}$ で有界な $\Omega$ から $M$ への harmonic map の列とする。このとき、部分列 $\{u_k\}$, harmonic map $u : \Omega \longrightarrow M$, $M$ の有限部分集合 $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ ( 空集合の場合もある ) が存在し、次の (i), (ii) をみたす。

(i) 部分列 $\{u_k\}$ は $M - \mathcal{S}$ 上、$C^\infty$ 位相で $u$ に収束する。

(ii) 各 $x_i \in \mathcal{S}$ に対し、定数 $\alpha_i$ ( $\geq \epsilon_0 > 0$ ) が存在して、

$$|du_k|^n\, dx \longrightarrow |du|^n\, dx + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_{x_i}\,, \qquad \text{as} \quad k \to \infty\,,$$

が成り立つ。ここで、$\delta_{x_i}$ は Dirac のデルタ関数をあらわし、収束は $\Omega$ 上の Radon 測度の弱位相の意味である。

**定理 4.4.** ( [ 10 ], [ 14 ] ) $\mathcal{S}$ の一点 $x_i$ を固定する。このとき、$\{a_k^{(i)}\} \subset \Omega$, $\{r_k^{(i)}\} \subset \mathbb{R}_+$ が存在し、次の (i)~(iii) をみたす。

(i) $\lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = x_i$, $\lim_{k\to\infty} r_k^{(i)} = 0$.

(ii) $v_k^{(i)}(x) = u_k(r_k^{(i)} x + a_k^{(i)})$ とすると、$v_k^{(i)}$ は $\mathbf{R}^n$ 上 $C^\infty$ 位相で収束する。

(iii) $v_k^{(i)}$ の極限を $v_i$ とすると、$v_i$ は $\mathbf{R}^n$ から $M$ への harmonic map であり

$$0 < \alpha_i = \int_{\mathbf{R}^n} |dv_i|^n\, dx < \infty\,,$$

をみたす。

定理 4.3, 4.4 は bubble theorem あるいは concentration compactness theorem と呼ばれており、他の非線形問題についても同様の定理が成り立つことが知られている ( [ 1 ], [ 6 ] )。$\mathcal{S}$ が空でないとき、$\{u_k\}$ は $W^{1,n}$ の弱位相で $u$ に収束しているが、強収束していない。定理 4.3. はこの理由は密度 $|du_k|^n\, dx$ の台が有限集合 $\mathcal{S}$ に凝縮するためであると述べている。定理 4.4 は $\mathcal{S}$ の点 $x_i$ のまわりで、測度の列 $\{|du_k|^n\, dx\}$ がデルタ関数に収束するときの状況が、全空間 $\mathbf{R}^n$ 上の non-constant harmonic map によって具体的に与えられることを示している。定理 4.3 において、$\mathcal{S}$ は

$$\mathcal{S} = \bigcap_{r>0} \Big\{\, x \in \Omega \;\Big|\; \liminf_{j\to\infty} \int_{B(x,r)} |du_j|^n\, dx \geq \epsilon_0 \,\Big\}\,,$$

で与えられる。

例 4.5. $\Omega$ を $\mathbb{R}^2$ の領域とし、$M$ を 2 次元球面 $S^2$ とする。$\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視し、$z_1, z_2, \cdots, z_p$ を $\Omega$ の与えられた相異なる $p$ 個の点とする。$\Omega$ から $S^2$ への写像の列 $\{u_j\}$ を

$$u_j(z) = \pi\big(j(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_p)\big), \qquad \text{for } z \in \Omega,$$

で定義すれば、各 $u_j$ は $\Omega$ から $S^2$ への harmonic map であり、次の (i)~(iii) が成り立つ。

(i) $\{u_j\}$ は定値写像 $u(z) = \pi(\infty) = (0,0,1)$ に $\Omega - \{z_1, \cdots, z_p\}$ 上 $C^\infty$ 位相で収束する。

(ii) $|du_j|^2\, dx \longrightarrow 8\pi \sum_{i=1}^{p} \delta_{z_i}, \qquad \text{as} \quad j \longrightarrow \infty.$

(iii) $v_j^{(i)}(z) = u_j((z/j) + z_i)$ とすると $\{v_j^{(i)}\}$ は harmonic map $v_i(z) = \pi(\prod_{l \neq i}(z_i - z_l)z)$ に $\mathbb{R}^2$ 上 $C^\infty$ 位相で収束する。

最後に、定理 4.3 において $S$ が空集合になる一つの例として次の定理を述べておく。

**定理 4.6.** ( [ 14 ] ) 多様体 $M$ は次の性質 (L) をもつとする。

(L) harmonic map $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ で、$\int_{\mathbb{R}^n} |dv|^n\, dx < \infty$ をみたすものは定値写像しかない。

このとき、$W^{1,n}$ で有界な harmonic map の列 $\{u_j\}$ に対し、$\Omega$ 上の $C^\infty$ 位相で $\Omega$ から $M$ へのある harmonic map に収束する部分列がえらべる。すなわち、定理 4.3 において、つねに $S$ は空集合となる。

## 参考文献


[ 1 ] H. Brezis & J. M. Coron : Convergence of solutions of H–systems or how to blow bubbles, Arch. Rat. Mech. Anal. **89**, pp.21–56, (1985).

[ 2 ] J. Eells & L. Lemaire : A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. **10**, pp.1–68, (1978).

[ 3 ] J. Eells & J. Sampson : Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **86**, pp.109–160, (1964).

[ 4 ] M. Giaquinta & S. Hildebrandt : A priori estimates for harmonic mappings, J. Reine Angew. Math. **336**, pp.124–164, (1982).

[ 5 ] D. Gilbarg & N. S. Trudinger : "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", second edition, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1983.

[ 6 ] H. B. Lawson, Jr. : "The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions", Regional Conference Series in Math. **58**, A. M. S., Providence, Rhode Island, 1985.

[ 7 ] G. Liao : A regularity theorem for harmonic maps with small energy, J. Diff. Geom. **22**, pp.233–241, (1985).

[ 8 ] F. H. Lin : Une remarque sur l'application $x/|x|$, C. R. Acad. Sci. Paris, **305**, Ser. I, pp.529–531, (1987).

[ 9 ] P. Price : A monotonicity formula for Yang–Mills fields, Manuscripta Math. **43**, pp.131–166, (1983).

[ 10 ] J. Sacks & K. K. Uhlenbeck : The existence of minimal immersion of 2–spheres, Ann. of Math. **113**, pp.1–24, (1981).

[ 11 ] R. Schoen : Analytic aspects for the harmonic map problem, in "Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations", ed. S. S. Chern, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1984.

[ 12 ] R. Schoen & S. T. Yau : Harmonic maps and the topology of stable hypersurfases and manifolds of non-negative Ricci curvature, Comm. Math. Helv. **51**, pp.333–341, (1976).

[ 13 ] S. Takakuwa : On removable singularities of stationary harmonic maps, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **32**, pp.373–395, (1985).

[ 14 ] S. Takakuwa : Harmonic map に対する収束定理, in " 非線形楕円型偏微分方程式の解 ", 京都大学数理解析研究所講究録 **679**, pp.240–249, 1989.

[ 15 ] S. Takakuwa : in preparation.

[ 16 ] S. T. Yau : Some function theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, Indiana J. Math. **25**, pp.659–670, (1976).